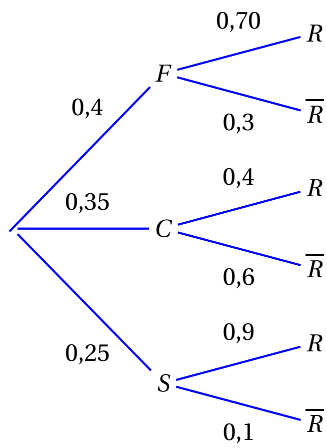
∽ Baccalauréat ES Liban ∾
27 mai 2014 – Corrigé

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $P(F)$ est la probabilité que la table choisie au hasard soit occupée par une famille.
   On a donc $P(F) = 0{,}4$.
   $P_S(R)$ est la probabilité que le serveur reçoivent un pourboire sachant que la table est occupée par une personne seule.
   On a donc $P_S(R) = 0{,}9$.
2. L'arbre complété est le suivant :



3. **a.** $P(F \cap R) = P(F)P_F(R) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

   b. $P(R) = P(F \cap R) + P(F \cap C) + P(F \cap S) = 0{,}28 + 0{,}35 \times 0{,}4 + 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}645$
4.
$$P_R(C) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} = \frac{0{,}14}{0{,}645} \approx 0{,}217$$

   La probabilité que la table soit occupée par un couple, sachant que le serveur a reçu un pourboire est d'environ 0,217.

Partie B

1. **a.**
$$P(6 \leqslant X \leqslant 24) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$$

   La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soient compris entre 6 et 24 euros est d'environ 0,95.

   b.
$$P(X \geqslant 20) \approx 0{,}13$$

2.
$$P_{6 \leqslant X \leqslant 24}(X \geqslant 20) = \frac{P(20 \leqslant X \leqslant 24)}{P(6 \leqslant X \leqslant 24)} \approx \frac{0{,}11}{0{,}954} \approx 0{,}12.$$

EXERCICE 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **La proposition correcte est la proposition c.**
   Chaque choix de jeune peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli. Le succès est l'évènement « le jeune est fumeur régulier ». La probabilité de succès est 0,236. On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Si on note X la variable aléatoire correspondant au nombres de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}236$.

$$P(X = 0) = 0{,}764^{10} \approx 0{,}068$$

2. **La proposition correcte est la proposition a.**

   La taille de l'échantillon n est supérieure à 30. On a également

$$np = 500 \times 0{,}236 = 118 \geqslant 5 \text{ et } n \times (1 - p) = 500 \times 0{,}764 = 382 \geqslant 5.$$

   L'intervalle de fluctuation asymptotique au seul de 95 % est donc

$$\left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}.\right]$$

   $p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p\times(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}236 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}236\times 0{,}764}}{\sqrt{500}} \approx 0{,}198$. Pour la borne inférieure, on donne une valeur approchée par défaut.
   $p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p\times(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}236 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}236\times 0{,}764}}{\sqrt{500}} \approx 0{,}274$. Pour la borne supérieure, on donne une valeur approchée par excès.

3. **La proposition correcte est la proposition a.**

$$2 \times 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01 \iff \frac{\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{0{,}005}{1{,}96} \iff \sqrt{n} \geqslant \frac{1{,}96\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{0{,}005}$$

$$n \geqslant \left(\frac{1{,}96\sqrt{0{,}236 \times 0{,}764}}{0{,}005}\right)^2 \approx 27\,707.$$

4. **La proposition correcte est la proposition b.**
   Dans cet échantillon de 250 jeunes fumeurs, la fréquence f de filles est $\frac{99}{250}$ soit 39,6 %.
   On a bien $n \leqslant 30$, $nf \leqslant 5$ et $n(1 - f) \leqslant 5$. L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est donné par la formule suivante.

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

   $f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}396 - \frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0{,}33$. On arrondit la borne inférieure par défaut.
   $f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}396 + \frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0{,}46$. On arrondit la borne supérieure par excès.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de la spécialité et candidats de la série L

1. **a.** a_1 correspond au nombre d'inscrits en 2014. Il y a 80 % des inscrits de 2013 qui renouvellent leur inscription, soit $0{,}8 \times 2\,500$ soit 2 000 personnes. Avec 400 nouveaux adhérents, on peut donc compter sur 2 400 inscriptions. $a_1 = 2\,400$.
   De même, $a_2 = 0{,}8 \times 2\,400 + 400 = 2\,320$

b. Pour l'année $2013+n+1$, le nombre d'anciens adhérents renouvelant leur inscription représente 80 % des inscrits de l'année précédente, soit $0,8a_n$. En ajoutant 400 nouvelles inscriptions, on obtient bien, suivant la modélisation proposée,

$$a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400.$$

2. a. Pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 2\,000 = 0,8a_n + 400 - 2\,000 = 0,8a_n - 1\,600 = 0,8\,(a_n - 2000) = 0,8v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
De plus, $v_0 = a_0 - 2\,000 = 2\,500 - 2\,000 = 500$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout entier naturel n, $v_n = 500 \times 0,8^n$.
Par suite, $a_n = v_n + 2\,000 = 500 \times 0,8^n + 2\,000$.

c. Une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 converge vers 0. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 0,8^n + 2\,000 = 2\,000.$$

d. Au fil des années, le nombre d'adhérents se stabilisera autour de 2 000.

3. a. Cet algorithme permet de déterminer à partir de quelle année le nombre d'adhérents passera en dessous des 2 050.

b. $a_{10} \approx 2\,054$ et $a_{11} \approx 2043$. La réponse donnée par l'algorithme est donc $n = 11$ et c'est donc en 2024 que le nombre d'adhérents sera inférieur pour la première fois à 2 050.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. u étant une fonction dérivable sur un intervalle, la dérivée de la fonction e^u sur cet intervalle est $u'\mathrm{e}^u$.
On a donc $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$

b.

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} = 0 \iff \mathrm{e}^{-x+0,5} = 1 \iff -x+0,5 = 0 \iff x = 0,5.$$

c.

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} > 0 \iff \mathrm{e}^{-x+0,5} < 1 \iff -x+0,5 < 0 \iff x > 0,5.$$

f' est donc négative sur [0 ; 0,5] et positive sur [0,5 ; 5].

d.

x	0		0,5		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$1+\mathrm{e}^{0,5}$				$6+\mathrm{e}^{-4,5}$
			2,5		

2. a.

$$2 \leqslant \alpha \leqslant 2,5.$$

b. Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui sont en dessous de la droite Δ. $\mathscr{S} = [\alpha~;~5]$.

Partie B Application

1. **a.** On utilise la valeur pour laquelle le minimum de la fonction f est atteint. Il faut produire 50 cartes pour que le coût d'utilisation de la machine soit minimal.

   b.
   $$B(x) = 1{,}5x - f(x) = 1{,}5x - (x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0{,}5} = 0{,}5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0{,}5}.$$

2. **a.**
   $$B'(x) = 0{,}5 + \mathrm{e}^{-x+0{,}5}.$$

   Une exponentielle est toujours positive, donc B' est strictement positive sur $[0~;~5]$ donc B est strictement croissante sur $[0~;~5]$.

   b. $B(0) = -1 - \mathrm{e}^{0{,}5} < 0$ et $B(5) = 1{,}5 - \mathrm{e}^{-4{,}5} > 0$.

   La fonction B est continue et strictement croissante sur $[0~;~5]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, le nombre 0 admet un et un seul antécédent par B sur $[0~;~5]$ et donc l'équation donnée a une et une seule solution β.

   D'après la calculatrice $B(2{,}32) < 0$ et $B(2{,}33) > 0$. Donc $2{,}32 < \beta < 2{,}33$.

3. L'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de cartes produites supérieure ou égale à 233.