Sujet Maths - Bac S
Nouvelle Calédonie
26 février 2018

EXERCICE 1 (4 points) (Commun à tous les candidats)

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36.
On a alors, à 10^{-3} près :

a. $P(X \leqslant 81{,}2) \approx 0{,}542$

b. $P(X \leqslant 81{,}2) \approx 0{,}301$

c. $P(81{,}2 \leqslant X \leqslant 103{,}8) \approx 0{,}542$

d. $P(81{,}2 \leqslant X \leqslant 103{,}8) \approx 0{,}301$

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2.
Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

a. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-2 < N < 2)}{2}$

b. $P(X > 52) = 1 - P(-2 < N < 2)$

c. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$

d. $P(X > 52) = 1 - P(-1 < N < 1)$

3. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0{,}5$.
Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P_{(T>2)}(T > 5)$ est égale à :

a. 0,35

b. 0,54

c. 0,53

d. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

4. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.

   On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées.

   On note $E(X)$ l'espérance de X. On a alors :

   a. $E(X) = 3$

   b. $E(X) = \dfrac{3}{8}$

   c. $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}905$ à 10^{-3} près

   d. $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}095$ à 10^{-3} près

EXERCICE 2 (5 points) (Commun à tous les candidats)

Soient les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

On pose :

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de Z.
2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. On admet que :
   - $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   - pour tous réels a et b, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.

   Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$

EXERCICE 3 (5 points) (Candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité)

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcr} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{array}\right.$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.
Affirmation B : Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

2. Soit une suite (v_n).
Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

alors la suite (v_n) converge.

3. Affirmation D : Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \ldots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7).$$

4. Soit (w_n) une suite convergente.
Affirmation E : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.

EXERCICE 4 (6 points) (Commun à tous les candidats)

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g.
   b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1 ; 0]$.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout $x > 1$,

   $$1 < x < x^2 < x^3.$$

   b. En déduire que, pour $x > 1$,

   $$0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

   c. On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}$ puis montrer que :

   $$\lim_{x\to+\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

   d. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

ExaMaths

Cours de Mathématiques
Soutien scolaire
Préparation aux examens

89 rue Paul Bellamy
44000 Nantes

Tél. 06 99 60 16 83

www.examaths.fr